

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Clasa a VII a
Vaslui, 14 februarie 2026
Barem evaluare și de notare

*Fiecare problemă se punctează cu 22,5 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.*

Problema 1

Fie $a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \dots + \sqrt{2^{2026}}$ și $b = 2^{1014} - \sqrt{2}$. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{a}$.

Soluție și barem

$$a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \dots + \sqrt{2^{2026}} / \cdot \sqrt{2} \dots\dots\dots 2,5p$$

$$\sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^{2026}} \text{ scădem relațiile } \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{2} \cdot a - a = \sqrt{2} \cdot 2^{1013} - 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} \cdot 2^{1013} - 1}{\sqrt{2} - 1} \dots\dots\dots 5p$$

$$b = 2^{1014} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot 2^{1013} - 1) \dots\dots\dots 5p$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot 2^{1013} - 1)}{\frac{\sqrt{2} \cdot 2^{1013} - 1}{\sqrt{2} - 1}} = 10 \cdot (\sqrt{2} - 1) \dots\dots\dots 5p$$

$$\sqrt{2} \cong 1,41 \Rightarrow \left[\frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{a} \right] = 4. \dots\dots\dots 3p$$

Problema 2

Numerele reale distincte a și b au proprietățile: $a^2 + b \in Q$ și $b^2 + a \in Q$.

a) Arătați că numerele $a = \frac{1+\sqrt{2026}}{2}$ și $b = \frac{1-\sqrt{2026}}{2}$ verifică proprietățile date.

b) Arătați că dacă $(a + b) \in Q \setminus \{1\}$, atunci a și $b \in Q$

Soluție și barem

$$a) \quad a^2 + b = \left(\frac{1+\sqrt{2026}}{2} \right)^2 + \frac{1-\sqrt{2026}}{2} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1+2\sqrt{2026}+2026}{4} + \frac{1-\sqrt{2026}}{2} = \dots\dots\dots 2p$$

$$= \frac{1+2\sqrt{2026}+2026+2-2\sqrt{2026}}{4} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{2029}{4} \in Q \dots\dots\dots 0,75p$$

$$b^2 + a = \left(\frac{1-\sqrt{2026}}{2} \right)^2 + \frac{1+\sqrt{2026}}{2} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1-2\sqrt{2026}+2026}{4} + \frac{1+\sqrt{2026}}{2} = \dots\dots\dots 2p$$

$$= \frac{1-2\sqrt{2026}+2026+2+2\sqrt{2026}}{4} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{2029}{4} \in Q \dots\dots\dots 0,75p$$

$$b) \ a^2 + b \in Q \text{ și } b^2 + a \in Q \Rightarrow (a^2 + b) - (b^2 + a) \in Q \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow (a^2 + b - b^2 - a) \in Q \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow ((a - b)(a + b) - (a - b)) \in Q \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b - 1) \in Q \dots\dots\dots 2p$$

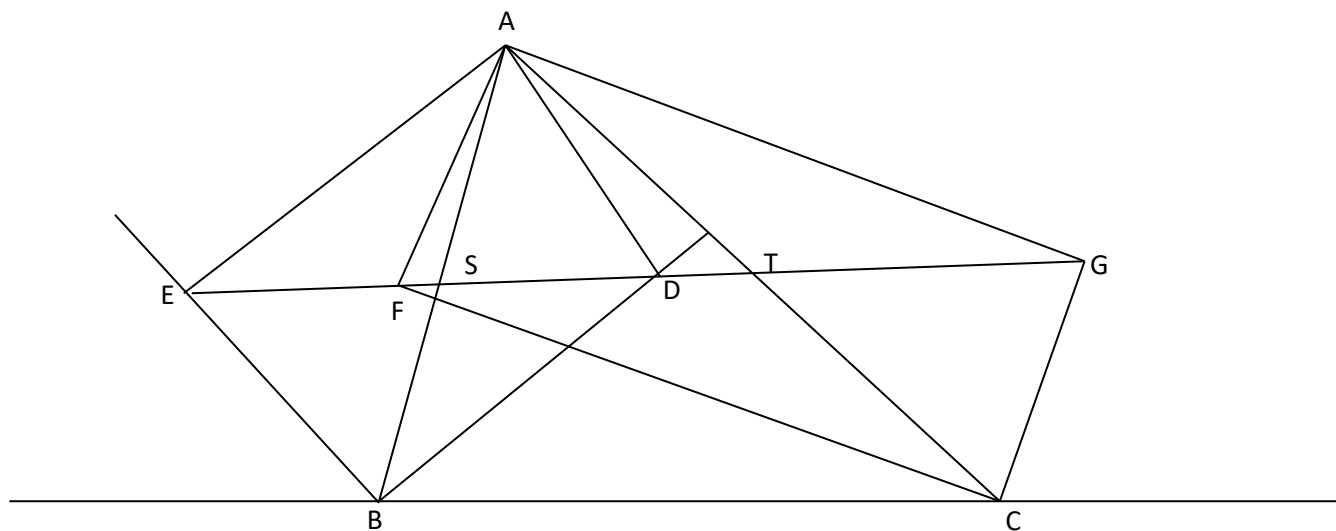
$$\text{dar } a + b \in Q \setminus \{1\} \Rightarrow (a + b - 1) \in Q^* \Rightarrow a - b \in Q \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{din } \begin{matrix} a + b \in Q \\ a - b \in Q \end{matrix} \Rightarrow a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} \in Q \text{ și } b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} \in Q \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3

Se consideră triunghiul oarecare ABC. Știind că D și E sunt picioarele perpendiculelor din A pe bisectoarele unghiului B, iar F și G sunt picioarele perpendiculelor din A pe bisectoarele unghiului C, arătați că punctele D, E, F, G sunt coliniare.

Soluție și barem:



$$m(\angle EBD) = m(\angle FCG) - (\angle \text{det. de bis. a două unghiuri adiacente suplementare}) \dots\dots\dots 5,5p$$

$$AEBD \text{ dreptunghi (are 3 } \angle \text{ de } 90^\circ) \Rightarrow E, S, D \text{ coliniare, S mijlocul lui AB } \dots\dots\dots 3p$$

$$\angle SDB \equiv \angle SBD \equiv \angle DBC \Rightarrow ED \parallel BC. (1) \dots\dots\dots 2p$$

$$AGCF \text{ dreptunghi (are 3 } \angle \text{ de } 90^\circ) \Rightarrow G, T, F \text{ coliniare, T mijlocul lui AC } \dots\dots\dots 3p$$

$$\angle TFC \equiv \angle TCF \equiv \angle FCB \Rightarrow GF \parallel BC. (2) \dots\dots\dots 2p$$

$$ST \text{ linie mijlocie în } \triangle ABC \Rightarrow ST \parallel BC. (3) \dots\dots\dots 5p$$

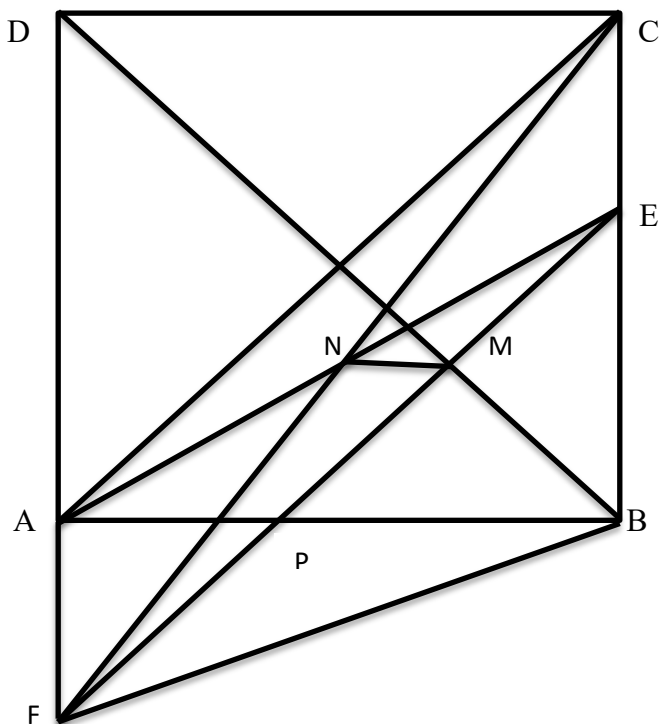
Din (1), (2), (3) și axioma paralelelor $\Rightarrow E, F, D, G$ coliniare 2p

Problema 4

Fie ABCD un pătrat și E un punct pe latura BC. Perpendiculara dusă din E pe BD intersectează diagonala BD în M și dreapta AD în F. Notăm cu N intersecția dintre dreptele AE și CF. Știind că $BF = 4 \cdot MN$, aflați măsura unghiului EDB.

(G.M. 9/2025)

Soluție și barem:



$\triangle BPE$ – dreptunghic isoscel $\Rightarrow BP \equiv BE$ și cum $AB \equiv BC \Rightarrow AP \equiv CE$ (1) 1,5p

$\triangle APF$ – dreptunghic isoscel $\Rightarrow AP \equiv AF$ (2). 1p

Din (1) și (2) obținem $AF \equiv CE$ 1p

$AF \parallel CE$ și $AF \equiv CE \Rightarrow ACEF$ – paralelogram $\Rightarrow N$ este mijlocul AE 3p

$\triangle BPE$ – dreptunghic isoscel și $BM \perp EP \Rightarrow EM \equiv MP$ 2p

În $\triangle APE$: N – mijl. AE și M – mijl. EP $\Rightarrow MN$ – linie mijlocie, deci $MN \parallel AP$ și

$MN = \frac{AP}{2}$ (3) 3p

Din ipoteză $BF = 4 \cdot MN$ (4).



Din (3) și (4) $\Rightarrow AP = AF = \frac{BF}{2}$ 2p

Din reciproca teoremei de 30^0 în $\triangle ABF \Rightarrow \sphericalangle ABF = 30^0$ 2p

$\triangle EDB \cong \triangle PDB$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle EDB \cong \sphericalangle PDB$ 2p

În $\triangle DEF: BA \perp DF$ și $FM \perp DB \Rightarrow P$ este ortocentrul triunghiului $\Rightarrow DP \perp BF$ 2p

Fie $DP \cap BF = \{T\}$. În $\triangle DTB$ avem $\sphericalangle DTB = 90^0$ și $\sphericalangle DBT = 75^0 \Rightarrow \sphericalangle BDP = 15^0$, deci $\sphericalangle EDB = 15^0$ 3p